
Počítačová grafika III – Radiometrie

Jaroslav Křivánek, MFF UK

Jaroslav.Krivanek@mff.cuni.cz



Směr, prostorový úhel, integrování na jednotkové kouli

Směr ve 3D

- **Směr** = jednotkový vektor ve 3D

- Kartézské souřadnice

$$\omega = [x, y, z], \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

- Sférické souřadnice

$$\omega = [\theta, \varphi]$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\theta = \arccos z$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

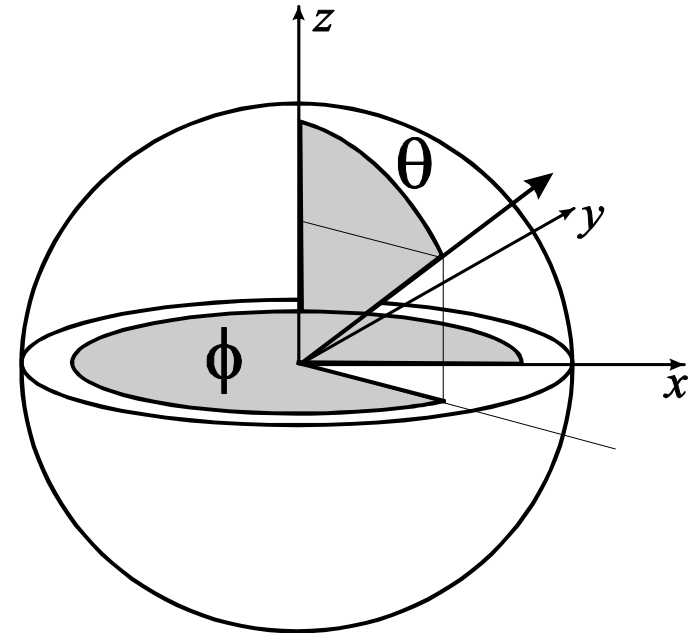
$$x = \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = \cos \theta$$

- θ ... *polární úhel* - odchylka od osy Z

- φ ... *azimut* - úhel od osy X



Funkce na jednotkové kouli

- Funkce jako každá jiná, ale argumentem je směr ve 3D
- Funkční hodnota je číslo (nebo třeba trojice čísel RGB)
- Zápis např.
 - $F(\omega)$
 - $F(x,y,z)$
 - $F(\theta,\phi)$
 - ...
 - Závisí na zvolené reprezentaci směrů ve 3D

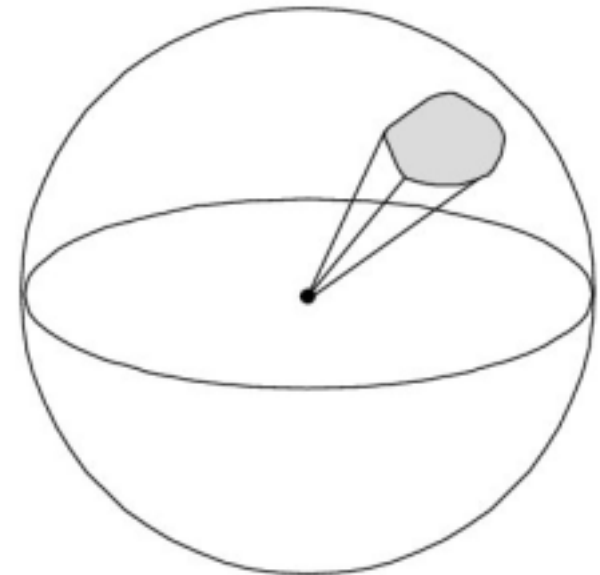
Prostorový úhel

■ Rovinný úhel

- Délka oblouku na jednotkové kružnici
- Kružnice má 2π radiánů

■ Prostorový úhel (steradian, sr)

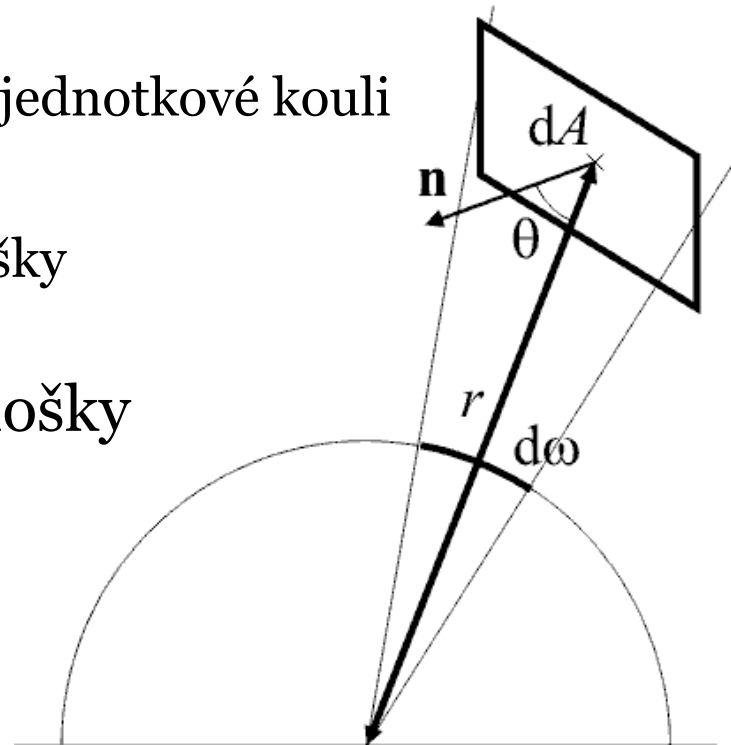
- Velikost plochy na jednotkové kouli
- Koule má 4π steradiánů



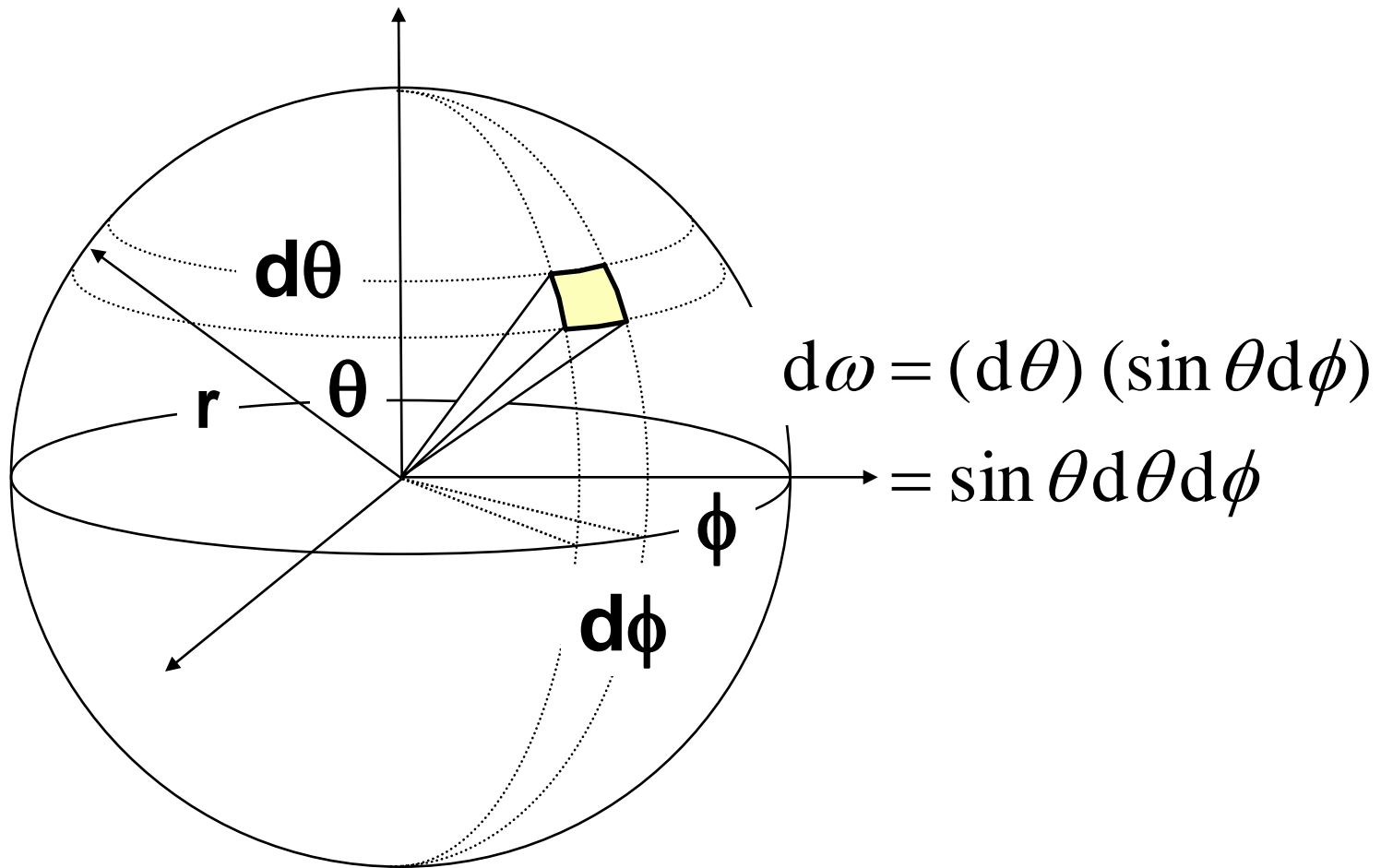
Diferenciální prostorový úhel

- „Nekonečně malý“ prostorový úhel okolo směru
- 3D vektor
 - Velikost $d\omega$
 - velikost diferenciální plošky na jednotkové kouli
 - Směr $d\omega$
 - střed projekce diferenciální plošky na jednotkovou kouli
- Prostorový úhel diferenciální plošky

$$d\omega = dA \frac{\cos \theta}{r^2}$$



Diferenciální prostorový úhel



Radiometrie a fotometrie

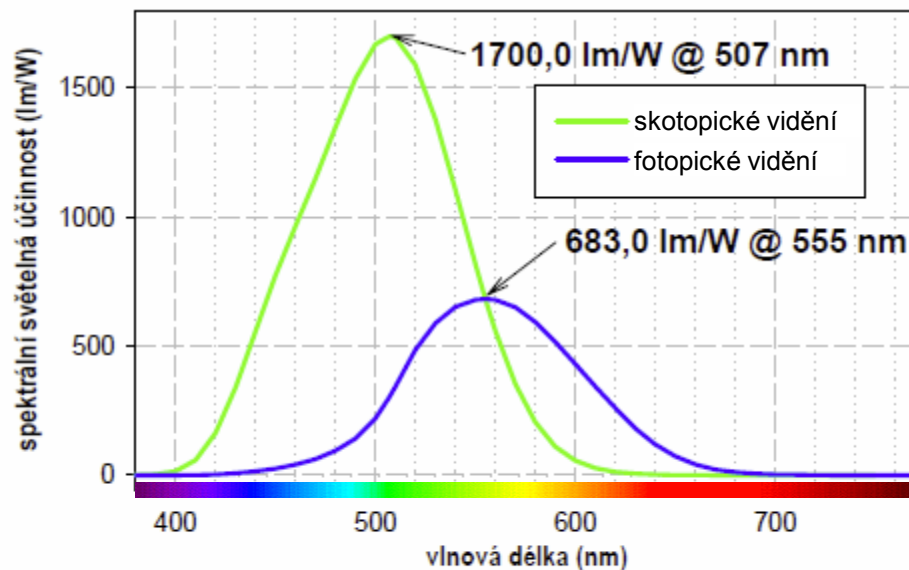
Radiometrie & Fotometrie

- „**Radiometrie** je část optiky, která se zabývá *měřením elektromagnetického záření*, včetně světla. Radiometrie se zabývá absolutními veličinami, zatímco **fotometrie** studuje obdobné veličiny, avšak z hlediska jejich *působení na lidské oko*.“ (Wikipedie)
- **Radiometrické veličiny**
 - zářivá energie – joule
 - zářivý tok – watt
 - zářivost – watt/sr
 - Ozn. index **e**
- **Fotometrické veličiny**
 - světelná energie – lumen-sekunda (talbot)
 - světelný tok – lumen
 - svítivost – kandela
 - Ozn. index **v**

Vztah mezi foto- a radiometrickými veličinami

■ Spektrální světelná účinnost $K(\lambda)$

$$K(\lambda) = \frac{d\Phi_{\lambda}}{d\Phi_{e\lambda}}$$



Obr. 7. Spektrální světelná účinnost při fotopickém (denním) vidění a skotopickém (soumrakovém) vidění.

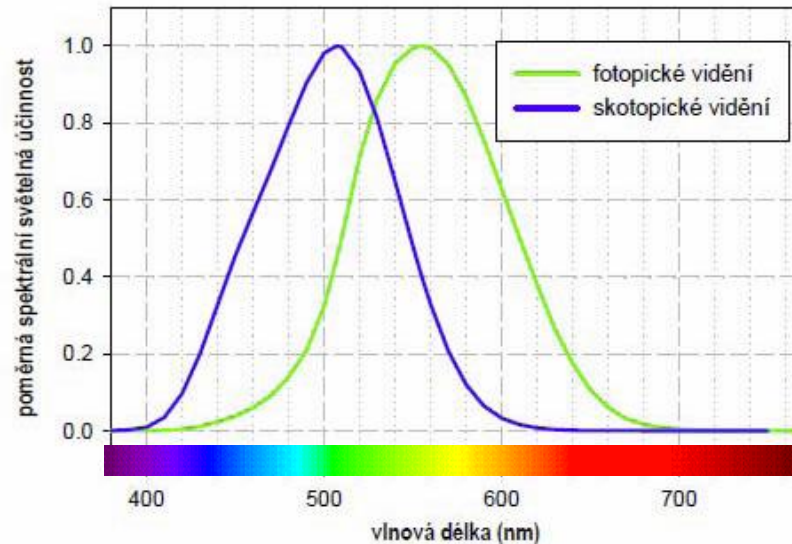
Vztah mezi foto- a radiometrickými veličinami

- Vizuální odezva na spektrum:

$$\Phi = \int_{380\text{nm}}^{770\text{nm}} K(\lambda) \Phi_e(\lambda) d\lambda$$

Vztah mezi foto- a radiometrickými veličinami

- **Poměrná spektrální světelná účinnost $V(\lambda)$**
 - Citlivost oka na světlo vlnové délky λ ve srovnání s maximální citlivostí na světlo s $\lambda_{\max} = 555 \text{ nm}$ (pro fotonické vidění).
 - CIE standard 1924



Obr. 6. Poměrná spektrální světelná účinnost při fotopickém (denním) a skotopickém (soumrakovém) vidění.

Vztah mezi foto- a radiometrickými veličinami

■ Radiometrie

- základnější – fotometrické veličiny lze odvodit z radiometrických

■ Fotometrie

- Delší historie - studována psychofyzikálními (empirickými) pokusy dlouho před znalostí Maxwellových rovnic

Radiometrické veličiny

Teorie přenosu světla (Transport theory)

- Tok energie v prostoru
- **Světelná energie je spojitá, nekonečně dělitelná**
 - Toto je zjednodušující předpoklad našeho modelu
- Představa toku
 - Částičky pohybující se prostorem
 - Žádné interakce (platí lineární superpozice)
 - Hustota energie je úměrná hustotě částic
 - Tato představa je abstraktní a nemá nic společného s fotony a s kvantovou teorií

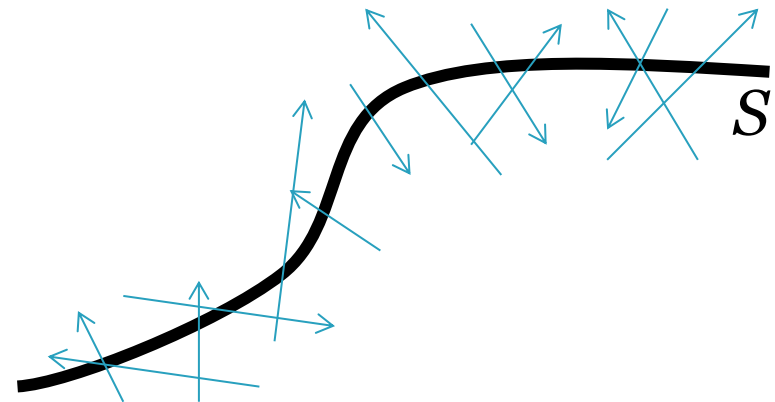
Zářivá energie – Q [J]

časový interval

interval vlnových délek

$$Q(S, \langle t_1, t_2 \rangle, \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle)$$

Plocha ve 3D
(imaginární nebo
skutečná)



- Anglický název: radiant energy
- Jednotka: Joule, J

Spektrální zářivá energie – Q [J]

- Energie světla o konkrétní vlnové délce
 - „Hustota energie vzhledem k vlnové délce“

$$Q_\lambda(S, \langle t_1, t_2 \rangle, \lambda) = \lim_{\substack{d(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow 0 \\ \lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle}} \frac{Q(S, \langle t_1, t_2 \rangle, \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle)}{\mu \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} = \text{formálně} = \frac{dQ}{d\lambda}$$

- Index / argument λ budeme vynechávat
- Fotometrická veličina:
 - Světelná energie (luminous energy), jednotka lumen-sekunda, neboli talbot

Zářivý tok (výkon) – Φ [W]

- Jak rychle energie „teče“ z/do plochy S ?
 - „Hustota energie vzhledem k času“

$$\Phi(S, t) = \lim_{\substack{d\langle t_1, t_2 \rangle \rightarrow 0 \\ t \in \langle t_1, t_2 \rangle}} \frac{Q(S, \langle t_1, t_2 \rangle)}{\mu\langle t_1, t_2 \rangle} = (\text{formálně}) = \frac{dQ}{dt}$$

- Anglický název: Radiant flux, Power
- Značka: Φ
- Jednotka: Watt – W
- Fotometrická veličina:
 - Světelný tok (luminous flux), jednotka Lumen

Ozáření – E [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$]

- Jaká je v daném místě \mathbf{x} na ploše S (prostorová) hustota toku?

$$E(\vec{x}) = \lim_{\substack{d(S) \rightarrow 0 \\ \vec{x} \in S, S \subseteq P}} \frac{\Phi_i(S)}{\mu(S)} = (\text{formálně}) = \frac{d\Phi_i}{dS}$$

- Vždy definováno vzhledem k nějakému bodu \mathbf{x} na ploše S se specifikovanou normálou $N(\mathbf{x})$.
 - **Hodnota radiance závisí na $N(\mathbf{x})$** (Lambertův zákon)
- Zajímá nás pouze světlo přicházející z horní strany plochy.

Ozáření – E [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$]

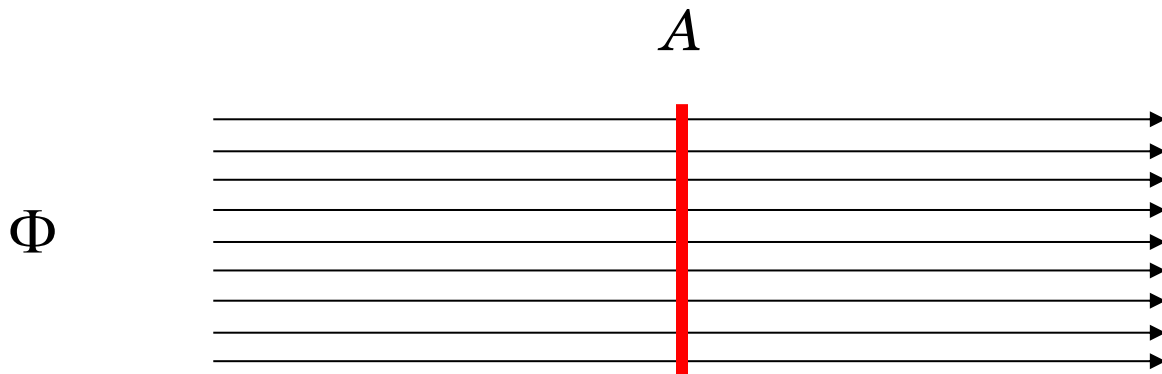
- Anglický název: **irradiance** (flux density)
- Značka: E
- Jednotka: Watt na metr čtvereční – $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$
- Fotometrická veličina:
 - osvětlení (illuminance), jednotka Lux = $\text{lumen}\cdot\text{m}^{-2}$

Expozimetr
(*light meter*)



Lambertův kosínový zákon

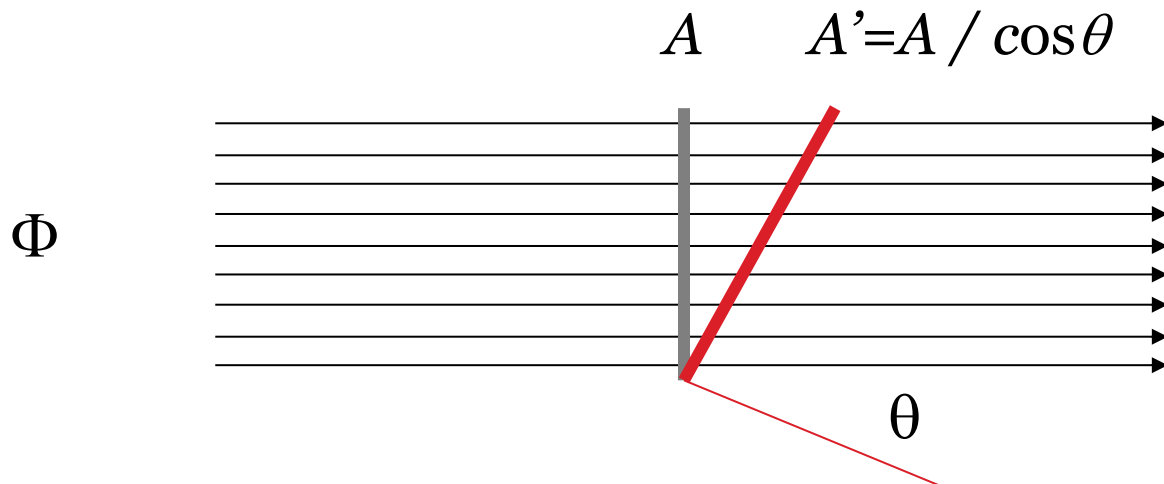
- Johan Heinrich Lambert, *Photometria*, 1760



$$E = \frac{\Phi}{A}$$

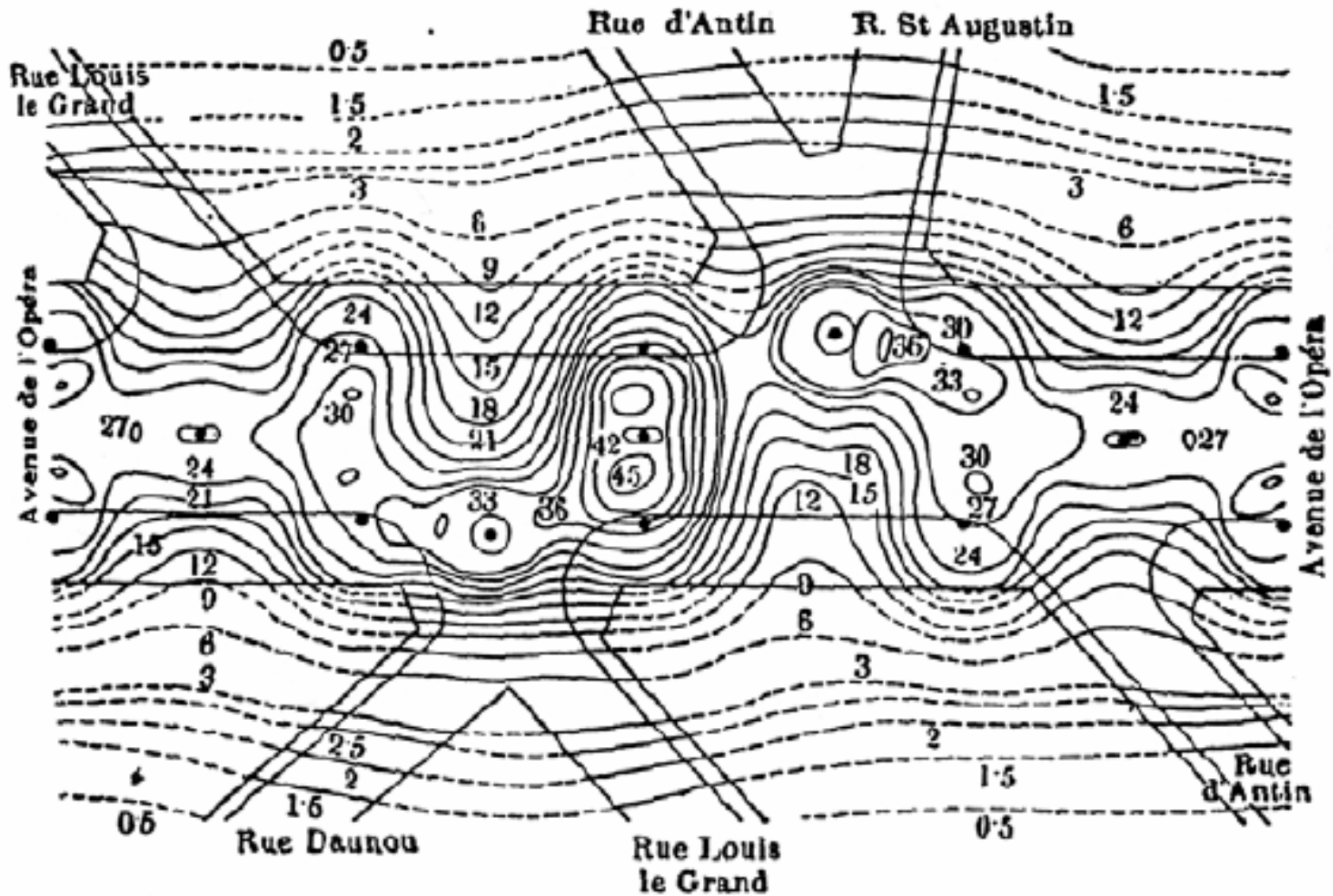
Lambertův kosínový zákon

- Johan Heinrich Lambert, *Photometria*, 1760



$$E' = \frac{\Phi}{A'} = \frac{\Phi}{A} \cos \theta$$

Irradiance Map or Light Map



Isolux contours

Typical Values of Illuminance [lm/m^2]

Sunlight plus skylight	100,000 lux
Sunlight plus skylight (overcast)	10,000
Interior near window (daylight)	1,000
Artificial light (minimum)	100
Moonlight (full)	0.02
Starlight	0.0003

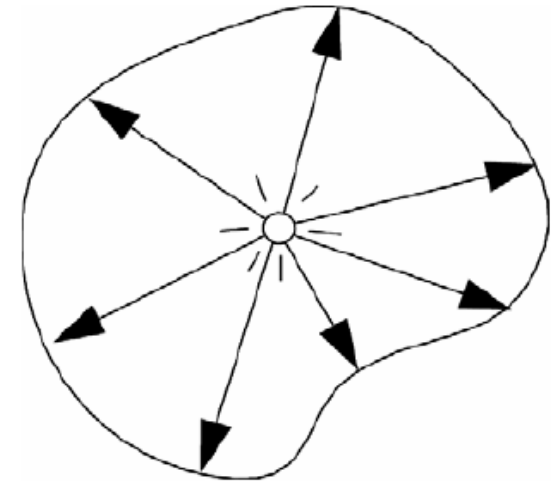
Intenzita vyzařování – B [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$]

- Jako ozáření (irradiance), avšak místo příchozího světla nás zajímá světlo vyzářené.
 - Vyzářené světlo může být emitováno z plošky (pokud jde o světelný zdroj) nebo odraženo.
- Anglický název: Radiant exitance, **radiosity**
- Značka: B , M
- Jednotka: Watt na metr čtvereční – $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$
- Fotometrická veličina:
 - Luminosity, jednotka Lux = $\text{lumen}\cdot\text{m}^{-2}$

Zářivost – I [$W \cdot sr^{-1}$]

- Úhlová hustota toku daném směru ω

$$I(\omega) = \frac{d\Phi(\omega)}{d\omega}$$



- **Definice:** Zářivost je výkon na jednotkový prostorový úhel vyzařovaný z bodového zdroje.
- Anglický název: Radiant intensity
- Jednotka: Watt na steradián – $W \cdot sr^{-1}$
- Fotometrická veličina
 - **Svítivost** (luminous intensity)
jednotka **Kandela** ($cd = lumen \cdot sr^{-1}$), zákl. jedn. SI

Bodové světelné zdroje

- Světlo emitováno z jednoho bodu
- Emise plně popsána intenzitou jako funkcí směru vyzařování: $I(\omega)$
 - **Izotropní bodové světlo**
 - konstantní intenzita
 - **Reflektor (Spot light)**
 - Konstantní uvnitř kuželu, nula jinde
 - **Obecný bodový zdroj**
 - Popsán *goniometrickým diagramem*
 - Tabulkové vyjádření $I(\omega)$ pro bodové světlo
 - Používáno v osvětlovací technice

SpotLight - Reflektor

- Bodové světlo s nekonstantní závislostí intenzity na směru
- Intenzita je funkcí odchylky od referenčního směru \mathbf{d} :

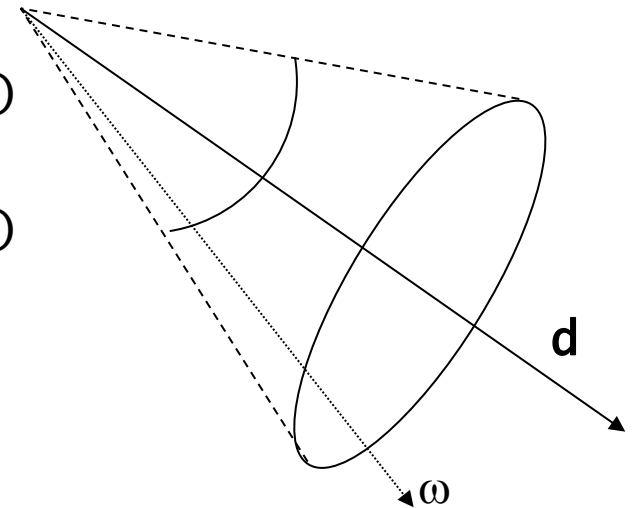
$$I(\omega) = f(\angle \omega, \mathbf{d})$$

- Např.

$$I(\omega) = I_o \cos \angle(\omega, \mathbf{d}) = I_o (\omega \cdot \mathbf{d}) \quad (1)$$

$$I(\omega) = \begin{cases} I_o & \angle(\omega, \mathbf{d}) < \tau \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (2)$$

- Jaký je tok v případě (1) a (2)?



Light Source Goniometric Diagrams

3



Porcelain-enameled ventilated standard dome with incandescent lamp



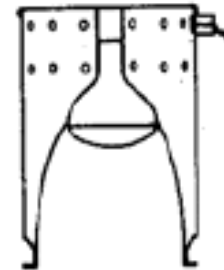
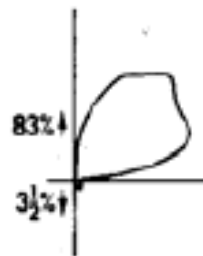
Pendant diffusing sphere with incandescent lamp



2



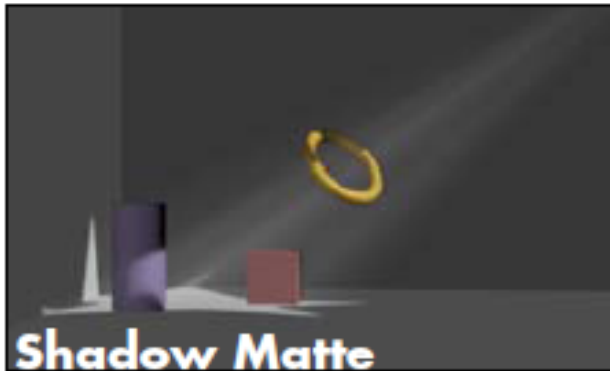
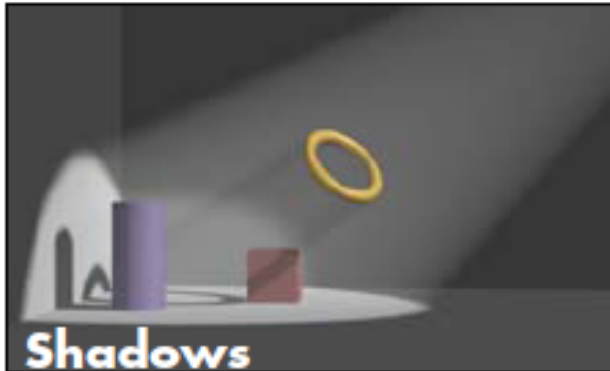
Concentric ring unit with incandescent silvered-bowl lamp



R-40 flood with specular anodized reflector skirt; 45° cutoff



PIXAR Light Source

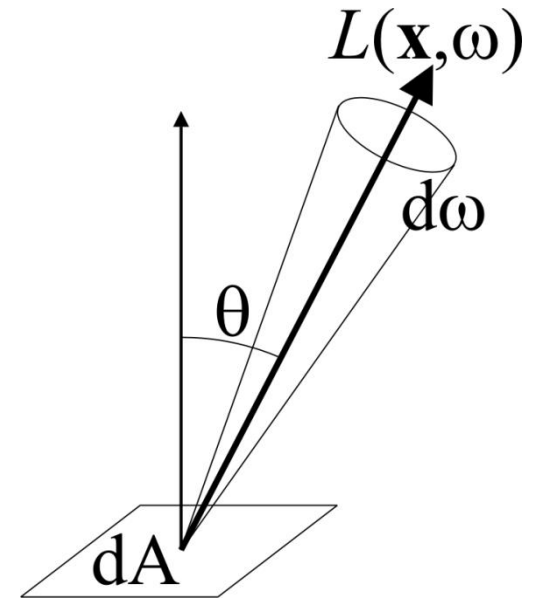


```
UberLight( )  
{  
  Clip to near/far planes  
  Clip to shape boundary  
  foreach superelliptical blocker  
    atten *= ...  
  foreach cookie texture  
    atten *= ...  
  foreach slide texture  
    color *= ...  
  foreach noise texture  
    atten, color *= ...  
  foreach shadow map  
    atten, color *= ...  
  Calculate intensity fall-off  
  Calculate beam distribution  
}
```

Zář – L [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}$]

- Prostorová a úhlová hustota toku v daném místě \mathbf{x} směru ω .

$$L(\mathbf{x}, \omega) = \frac{d^2\Phi}{\cos\theta dA d\omega}$$

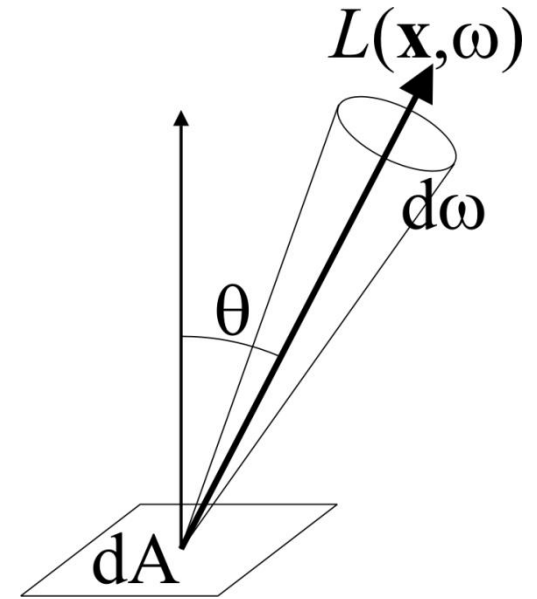


- **Definice:** Zář je výkon na jednotkovou plochu **kolmou k paprsku** a na jednotkový prostorový úhel ve směru paprsku.

Zář – L [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}$]

- Prostorová a úhlová hustota toku v daném místě \mathbf{x} směru ω .

$$L(\mathbf{x}, \omega) = \frac{d^2\Phi}{\cos\theta dA d\omega}$$



- Anglický název: **Radiance**
- Jednotka: $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}$
- Fotometrická veličina
 - Jas (luminance), jednotka **candela.m⁻²** (v ang. též Nit)

Faktor $\cos \theta$ v definici radiance

- Faktor $\cos \theta$ kompenzuje úbytek irradiance na ploše se zvyšujícím se θ při stejné míře osvětlení
- Tj. svítím-li na nějakou plochu zdrojem světla, jehož parametry neměním, a otáčím onou plochou, pak:
 - **Irradiance se s otáčením mění** (mění se hustota toku na plošce).
 - **Zář se nemění** (protože změna hustoty toku na ploše je kompenzována faktorem $\cos \theta$ v definici záře).

Typical Values of Luminance [cd/m^2]

Surface of the sun	2,000,000,000 nit
Sunlight clouds	30,000
Clear day	3,000
Overcast day	300
Moon	0.03

The Sky Radiance Distribution



Plate 5-16. Fisheye view of clear sky at the South Pole. (Photographed by the author)

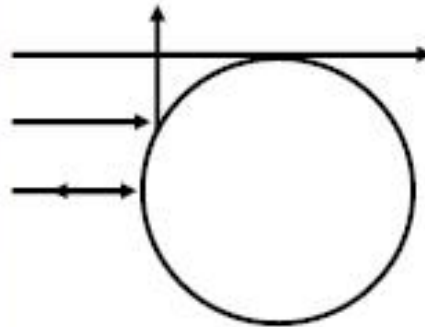


Plate 5-17. View of slightly hazy sky in Wisconsin. (Photographed by the author)

From Greenler, Rainbows, halos and glories

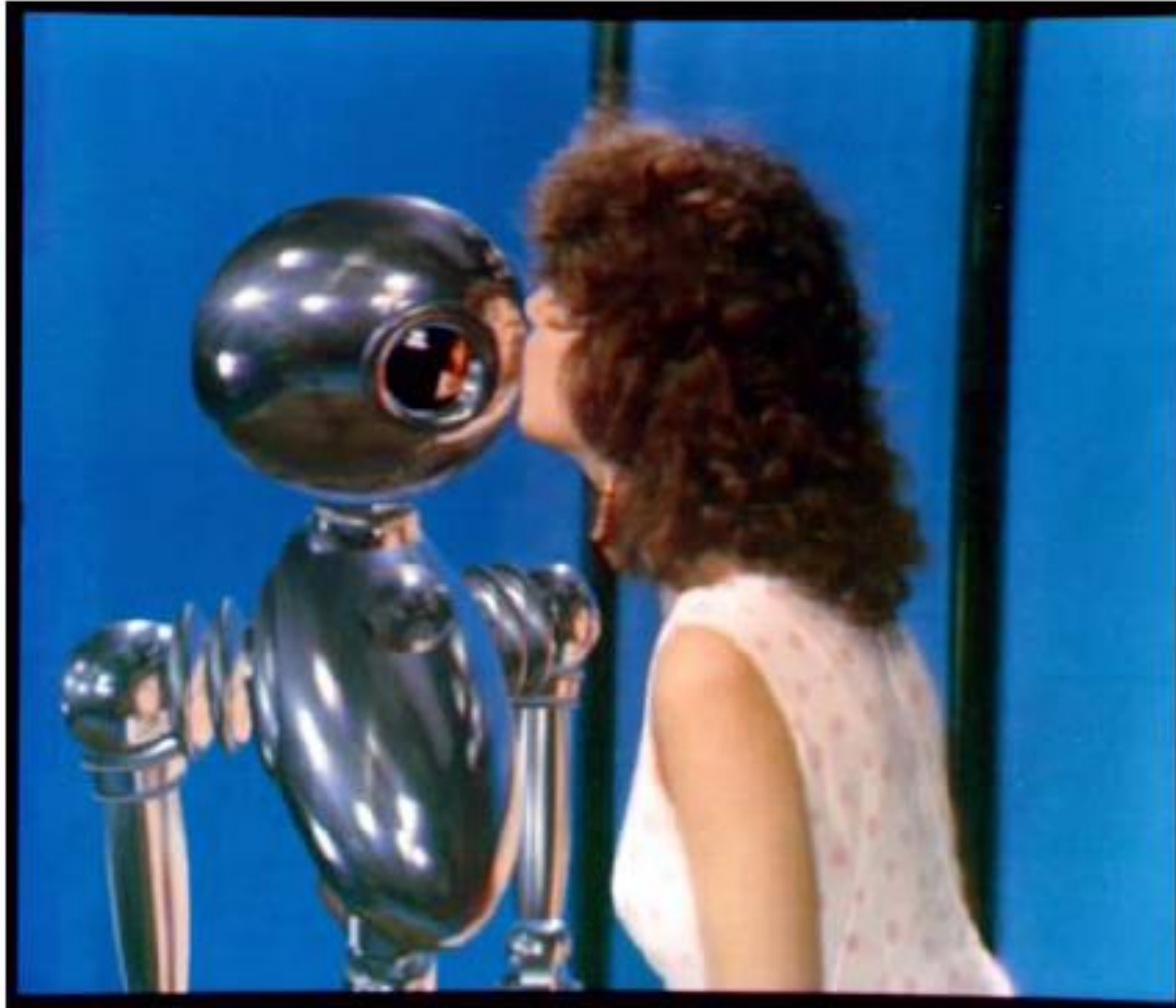
Gazing Ball \Rightarrow Environment Maps

Miller and Hoffman, 1984



- Photograph of mirror ball
- Maps all spherical directions to a to circle
- Reflection direction indexed by normal
- Resolution function of orientation

Environment Maps



Interface, Chou and Williams (ca. 1985)

Výpočet ostatních veličin z radiance

$$E(\mathbf{x}) = \int_{H(\mathbf{x})} L(\mathbf{x}, \omega) \cos \theta \, d\omega$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_A E(\mathbf{x}) \, dA_{\mathbf{x}} \\ &= \int_A \int_{H(\mathbf{x})} L(\mathbf{x}, \omega) \cos \theta \, d\omega \, dA_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

$\cos \theta \, d\omega =$ promítнутý prostorový úhel
(projected solid angle)

$H(\mathbf{x}) =$ hemisféra nad bodem \mathbf{x}

Plošné světelné zdroje

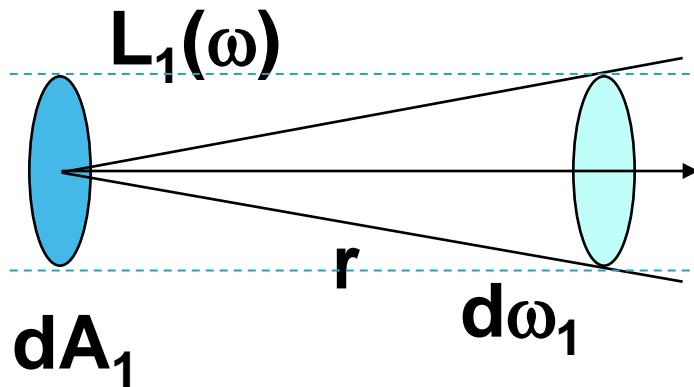
- Záření plně popsáno vyzářenou radiancí $L_e(\mathbf{x}, \omega)$ pro všechna místa a směry na zdroji světla
- Celkový zářivý tok
 - Integrál $L_e(\mathbf{x}, \omega)$ přes plochu zdroje a úhly

$$\Phi = \int_A \int_{H(\mathbf{x})} L_e(\mathbf{x}, \omega) \cos \theta \, d\omega \, dA_{\mathbf{x}}$$

Vlastnosti radiance (1)

- **Radiance je konstantní podél paprsku.**
 - ❑ Fundamentální vlastnost pro přenos světla
 - ❑ Proto je právě radiance radiometrickou veličinou spojenou s paprskem v ray traceru
 - ❑ Odvozeno ze zachování toku

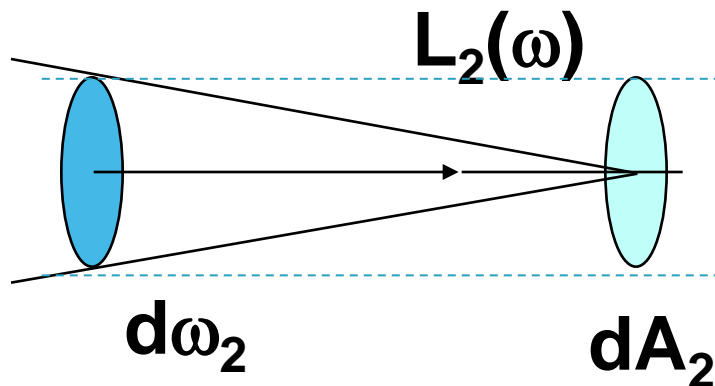
Důkaz: Zákon zach. energie v paprsku



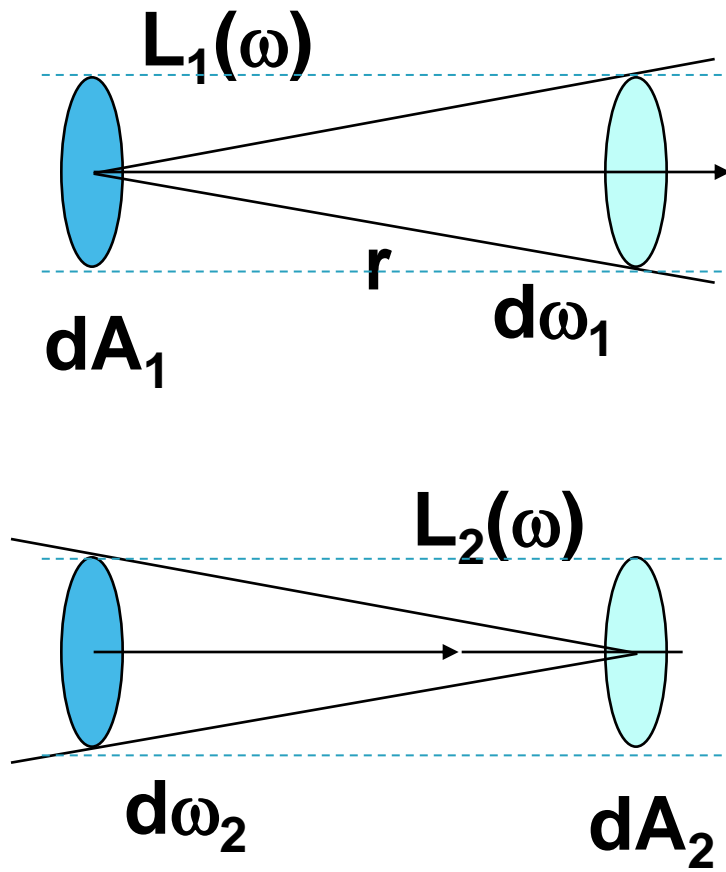
$$L_1 d\omega_1 dA_1 = L_2 d\omega_2 dA_2$$

emitovaný
výkon

přijímaný
výkon



Důkaz: Zákon zach. energie v paprsku



$$L_1 d\omega_1 dA_1 = L_2 d\omega_2 dA_2$$

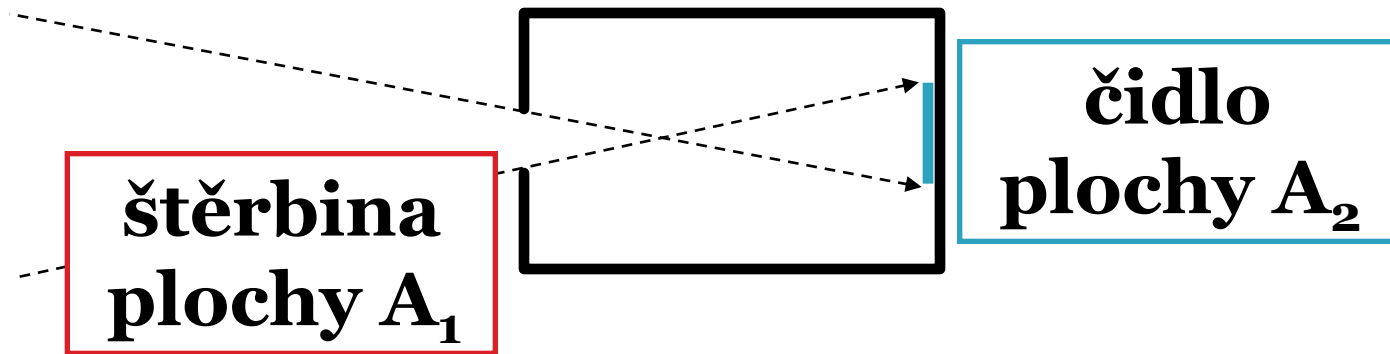
$$\underline{T} = d\omega_1 dA_1 = d\omega_2 dA_2 = \\ = \frac{dA_1 dA_2}{r^2}$$

kapacita paprsku

$$L_1 = L_2$$

Vlastnosti radiance (2)

- **Odezva senzoru** (kamery nebo lidského oka) je přímo úměrná hodnotě **radiance** odražené od plochy viditelné senzorem.



$$\underline{R} = \int_{A_2} \int_{\Omega} L_{in}(\mathbf{A}, \omega) \cdot \cos \theta \, d\omega \, dA = \underline{L_{in}} \cdot T$$

Příchozí / odchozí radianční

- Na rozhraní je radianční nespojitá
 - Příchozí (incoming) radianční – $L^i(\mathbf{x}, \omega)$
 - radianční před odrazem
 - Odchozí (odražená, outgoing) radianční – $L^o(\mathbf{x}, \omega)$
 - radianční po odrazu

Radiometrické a fotometrické názvosloví

Fyzika <i>Physics</i>	Radiometrie <i>Radiometry</i>	Fotometrie <i>Photometry</i>
Energie <i>Energy</i>	Zářivá energie <i>Radiant energy</i>	Světelná energie <i>Luminous energy</i>
Výkon (tok) <i>Power (flux)</i>	Zářivý tok <i>Radiant flux (power)</i>	Světelný tok (výkon) <i>Luminous power</i>
Hustota toku <i>Flux density</i>	Ozáření <i>Irradiance</i>	Osvětlení <i>Illuminance</i>
dtto	Intenzita vyzařování <i>Radiosity</i>	??? <i>Luminosity</i>
Úhlová hustota toku <i>Angular flux density</i>	Zář <i>Radiance</i>	Jas <i>Luminance</i>
??? Intensity	Zářivost <i>Radiant Intensity</i>	Svítivost <i>Luminous intensity</i>

- Odraz světla na povrchu – rovnice odrazu